



پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



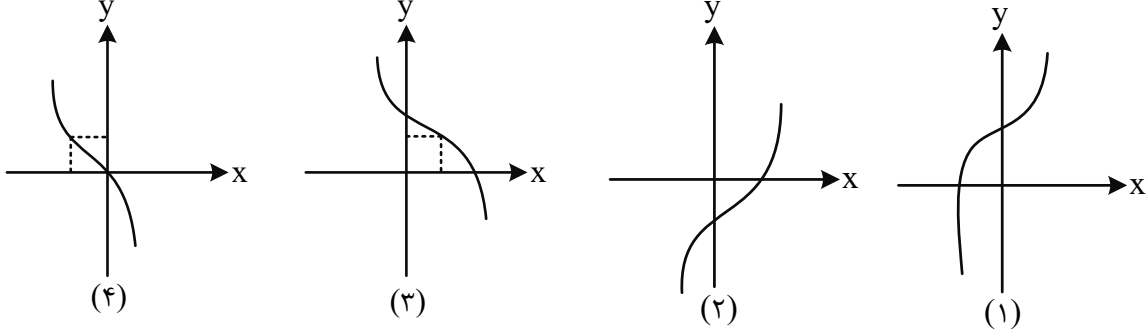
دفترچه سؤال

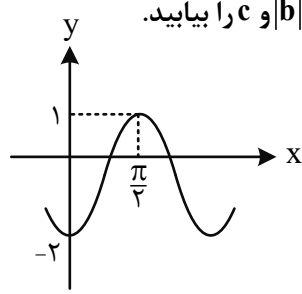
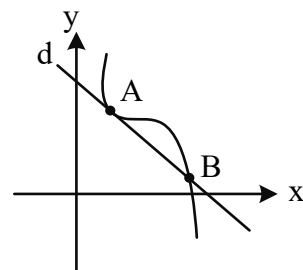
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

زمان پاسخگویی	تعداد صفحه	درس	ردیف
۱۲۰ دقیقه	۲	ریاضی (۳)	۱

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

ردیف	سوالات (پاسخ‌برگ دارد)	نمره
سوالات آزمون شبهه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳ پایه: دوازدهم رشته: علوم تجربی تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴		
تعداد صفحه: ۲ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه نام و نام خانوادگی: ساعت شروع: گروه آموزشی ماز		
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) تابع $y = -\log^x x$ در دامنه خود، اکیداً نزولی است.</p> <p>ب) بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است.</p> <p>پ) نقطه‌ای روی نمودار $y = x^2 - 2x$ وجود ندارد که مقدار مشتق در آن برابر صفر باشد.</p>	۰/۷۵
۲	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^3$ باشد، آن‌گاه مقدار $g \circ f^{-1}(3)$ برابر است.</p> <p>ب) برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ با فرض $k > 0$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در ضرب کنیم.</p> <p>پ) در دو نقطه به طول ۷ و مقدار مشتق تابع $y = x^2 - 6x$ در آن‌ها قرینه یکدیگر است.</p>	۰/۷۵
۳	<p>نمودار توابع $f(x) = -(x-1)^3 + 1$ و $g(x) = x^3 - 1$ را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید و سپس شماره مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)</p> 	۰/۵
۴	<p>نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ x^2 x & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و تعیین کنید که در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟</p>	۱/۵
۵	<p>اگر $fog(x) = 2x^2 - 6x + 3$ و $f(x) = 2x - 3$، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.</p>	۰/۷۵
۶	<p>نقطه $A(2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ با نقطه $A'(4, 2)$ روی نمودار تابع $y = kf(mx)$ متناظر است. مقادیر k و m را با ذکر دلیل بنویسید.</p>	۱
۷	<p>تابع $f(x) = x^2 + 4x + 5$ را با دامنه $(-\infty, -2]$ در نظر بگیرید، ضابطه وارون f را بیابید و سپس نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.</p>	۱/۷۵
۸	<p>اگر $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$، مقادیر $f^{-1}(5)$ و $f \circ f^{-1}(12)$ را به دست آورید.</p>	۰/۷۵
۹	<p>دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin(2ax) + 2$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. مقدار a را تعیین کرده، سپس مقادیر ماکزیمم و مینیمم f را به دست آورید.</p>	۱

سؤالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۲	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)		
۱۰	<p>ضابطه مربوط به نمودار داده شده به صورت $f(x) = a \cos(bx) + c$ است. مقادیر a و b و c را بیابید.</p> 		
۱۱	فرض کنید $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α زاویه ای در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد. مقدار $\sin 2\alpha$ را به دست آورید.		
۱۲	معادله مثلثاتی $\cos 2x - 3 \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.		
۱۳	<p>حاصل حدهای زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x^2 - 4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{2 + x}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$</p>		
۱۴	اگر چند جمله ای $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 6$ بر $x - 3$ بخش پذیر باشد، مقدار a را بیابید.		
۱۵	مقادیر a و b را به گونه ای بیابید که $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{2x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد.		
۱۶	نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ باشد.		
۱۷	<p>مطابق شکل، خط d در نقطه $A(1, 3)$ بر نمودار تابع f مماس و در نقطه $B(4a - 1, a)$ آن را قطع می کند. اگر $f'(1) = -1$ باشد، مقدار a را بیابید.</p> 		
۱۸	اگر $f(2) = 3$ و $f'(2) = -2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f^2(2)}{x - 2}$ را محاسبه کنید.		
۲۰	موفق باشید.		
	صفحه ۲ از ۲		



پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



پاسخبرگ ریاضی (۳)

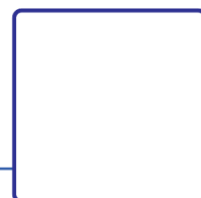
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

نمره	پاسخ برگ	ردیف
۰/۷۵	الف) (ب) (پ)	۱
۰/۷۵	الف) (ب) (پ)	۲
۰/۵		۳
۱/۵		۴
۰/۷۵		۵
۱		۶



ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۷		۱/۷۵
۸		۰/۷۵
۹		۱
۱۰		۱/۷۵
۱۱		۱



ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۲		۱/۲۵
۱۳	(الف) (ب) (پ)	۲
۱۴		۰/۷۵
۱۵		۱



ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۶		۱
۱۷		۱/۲۵
۱۸		۱/۲۵
	موفق باشید.	۲۰





پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

ویراستاران

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی‌پور

طراحان

حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان

درس

ریاضی (۳)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

زودبیسست

مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

زهره جعفری
ساره محمدعلی نسب

یگانه پوراابراهیم
محدثه عربگری

مرضیه بنیانی
محدثه شیخعلی

سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ما با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

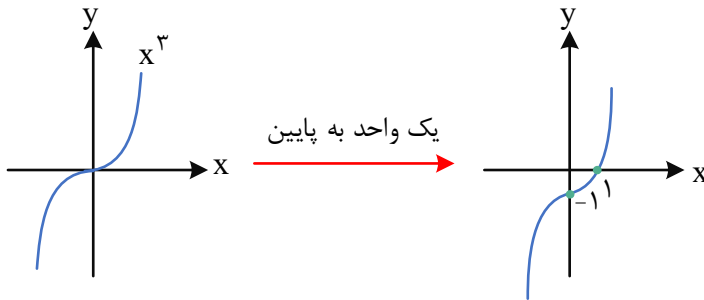
دکتر رسول خنجری

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		رشته: علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم		تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		ساعت شروع:
گروه آموزشی ماز		مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	<p>مصحح شو</p> <p>الف) درست (۰.۲۵) (صفحه ۱۰) ب) درست (۰.۲۵) (صفحه ۵۳) پ) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۷۶)</p> <p>بررسی دقیق تر:</p> <p>الف) تابع \log_3^x اکیداً صعودی و در نتیجه $-\log_3^x$ اکیداً نزولی است. (روی دامنه)</p> <p>ب) بازه (a, b) برای هر $x \in (a, b)$ یک همسایگی است.</p> <p>پ) شیب خط مماس در رأس سهمی صفر و در نتیجه مشتق سهمی در $x = x_S$ همیشه صفر است.</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه</p> <p>نقشه نهایی:</p> <p>معمولاً نوی این بخش سوالات یا محاسبات ریاضی ندارند و یا مستقیماً از تعریف کتاب میان. حتماً خیلی خوب به تعریف مسلط بشید.</p>	۰/۷۵
۲	<p>مصحح شو</p> <p>الف) ۸ (۰.۲۵) (صفحه ۲۹) ب) $\frac{1}{k}$ (۰.۲۵) (صفحه ۱۹) پ) -1 (۰.۲۵) (صفحه ۷۴)</p> <p>بررسی دقیق تر:</p> <p>الف)</p> $f^{-1}(3) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 3$ $f(\alpha) = 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2$ $g \circ f^{-1}(3) = g(2) = 2^3 = 8$ <p>پ)</p> <p>روش اول:</p> $y' = 2x - 6 \Rightarrow y'(7) = 2(7) - 6 = 8 \Rightarrow y'(\alpha) = -8$ $\Rightarrow 2\alpha - 6 = -8 \Rightarrow \alpha = -1$ <p>روش دوم:</p> <p>شیب خط مماس بر دو نقطه که نسبت به رأس سهمی قرینه باشند، قرینه یکدیگر است. (به خاطر تقارن سهمی!)</p> <p>در نتیجه چون $x_S = 3$، $x' = -1$، $\frac{x' + 7}{2} = 3 \Rightarrow x' = -1$ است.</p> <p>مسیر تمرینی:</p> <p>مشابه این سوال در سوال ۱ قسمت «پ» امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه</p>	۰/۷۵
۳	<p>مصحح شو</p> <p>الف) $f(x)$: شماره ۳ (۰.۲۵) ب) $g(x)$: شماره ۲ (۰.۲۵)</p>	۰/۵

بررسی دقیق تر:

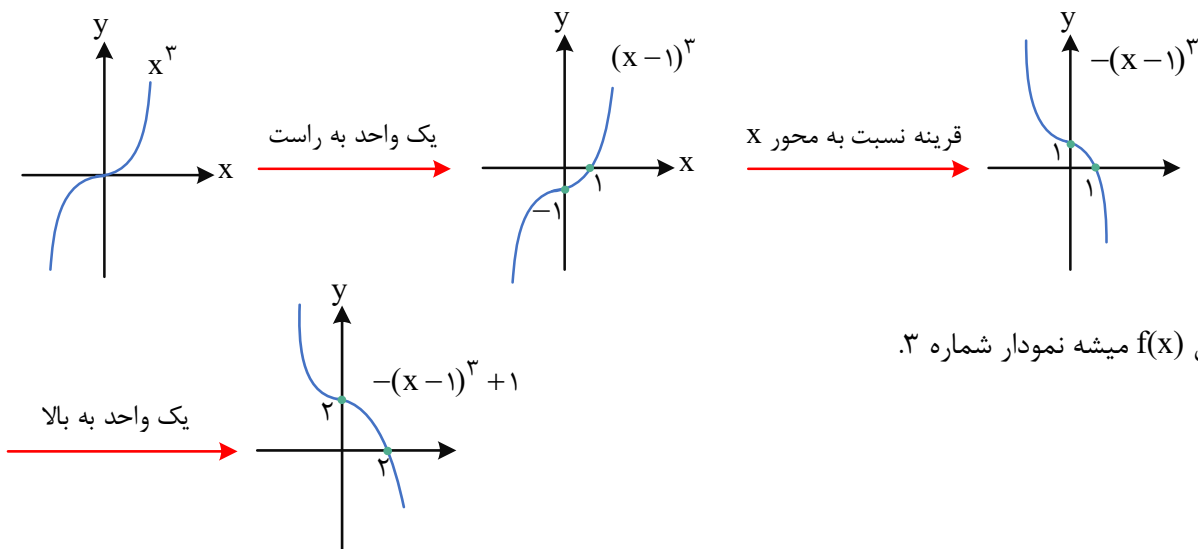
به کمک انتقال نمودار این توابع را رسم می کنیم:

$$g(x) = x^3 - 1$$



پس $g(x)$ همیشه نمودار شماره ۲.

$$f(x) = -(x-1)^3 + 1$$



پس $f(x)$ همیشه نمودار شماره ۳.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه

نقشه نهایی:

اگر سوال رسم توابع به کمک انتقال بود تمام مراحل رو رسم کنید که نمره ای رو این وسط از دست ندین!

مصطح شو

(صفحه ۱۰)

نزولی $(-\infty, 0]$ $(0, 25)$

صعودی $[0, 1)$ $(0, 25)$

صعودی $[1, +\infty)$ $(0, 25)$










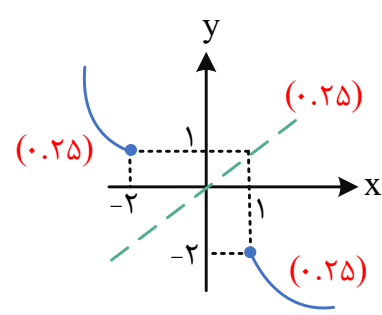
مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۳ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

۱/۵

۴

	<p>نقشه نهایی:  حتماً و حتماً دوبار چک کنین که تابع رو توی بازه درستی رسم کردین! خیلی از بچه‌ها همینجا نمره رو از دست میدن!</p>	
<p>۰/۷۵</p>	<p>مصّحّ شو  (صفحه ۲۲)</p> $f \circ g(x) = 2g(x) - 3 = 2x^2 - 6x + 3$ <p style="text-align: center;">(۰.۲۵) (۰.۲۵)</p> $\Rightarrow g(x) = x^2 - 3x + 3 \quad (۰.۲۵)$ <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه </p> <p>تابع ترکیب </p> <p>اگر f و g دو تابع باشند، $f \circ g$ را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب:</p> $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ <p>مسیر تمرینی:  مشابه این سوال در سوال ۴ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p>	<p>۵</p>
<p>۱</p>	<p>مصّحّ شو  (صفحه ۲۱)</p> <p>طول نقطه دو برابر شده است (۰.۲۵)، پس $m = \frac{1}{3}$ (۰.۲۵)</p> <p>عرض نقطه نصف شده است (۰.۲۵)، پس $k = \frac{1}{3}$ (۰.۲۵)</p> <p>بررسی دقیق‌تر: </p> <p>برای پیدا کردن k و m، باید بررسی کنیم چه تغییری روی A رخ داده است. طول آن دو برابر و عرض آن نصف شده، پس باید $m = \frac{1}{3}$ و $k = \frac{1}{3}$ باشد.</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه </p>	<p>۶</p>
<p>۱/۷۵</p>	<p>مصّحّ شو  (صفحه ۲۹)</p> $y = (x+2)^2 + 1 \Rightarrow (x+2)^2 = y-1 \Rightarrow x+2 = -\sqrt{y-1}$ <p style="text-align: center;">(۰.۲۵) (۰.۵)</p> $\Rightarrow x = -\sqrt{y-1} - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} - 2$ <p style="text-align: center;">(۰.۲۵)</p> 	<p>۷</p>

بررسی دقیق‌تر:

برای پیدا کردن وارون سهمی، با مربع کامل سازی X را تنها می‌کنیم.

$$y = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-1} - 2$$

برای این که بفهمیم + یا - بوده پشت رادیکال، از این نکته استفاده می‌کنیم: $R_{f^{-1}} = D_f$

و چون طبق فرض $R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, -2]$ و در نتیجه: $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x-1}$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

نکته طلایی

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x و بالعکس، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

یه نمونه باحال

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ را به دست آورید:

$$f(x) = \frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y = \frac{-8x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = -8x+3 \Rightarrow 2y-3 = -8x \Rightarrow x = \frac{2y-3}{-8} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{-8}$$

مصطح شو

(صفحه ۲۵)

$$f^{-1}(\Delta) = a \Rightarrow f(a) = \Delta \Rightarrow 2\sqrt{a} - 1 = \Delta \Rightarrow a = 9 \quad (0.25)$$

(0.25)

$$fof^{-1}(12) = 12 \quad (0.25)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

یادگیری بیشتر:

۱) دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f می‌باشد. به همین ترتیب برد تابع f^{-1} ، همان دامنه تابع f است.

۲) قرار نیست همه تابع‌ها در کل دامنه‌شان وارون‌پذیر باشند اما حالت‌هایی وجود دارند که با محدود کردن دامنه شرط وارون‌پذیری را ایجاد می‌کنیم.

۳) هیچ تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ روی \mathbb{R} یک‌به‌یک نیست. اما اگر نمودار f را به یکی از بازه‌های $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ و $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه محدود کنیم، تابعی یک‌به‌یک خواهیم داشت.

۴) ترکیب تابع f با معکوسش یعنی f^{-1} به صورت زیر است:

$$fof^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

تذکر: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ دقت کنید علامت -۱ در بالای سر f به معنای معکوس شدن کسری نیست.

۰/۷۵

۸

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۵ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحح شو

(صفحه ۳۵)

$$T = \frac{2\pi}{|2a|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |a| = 2 \quad (0.25)$$

$$\begin{cases} \max = 2 + |a| = 5 \quad (0.25) \\ \min = 2 - |a| = -1 \quad (0.25) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

توابع مثلثاتی:

در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{cases} \max = |a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + \text{ضریب } \sin \text{ یا } \cos : \text{ بیشترین مقدار} \\ \min = -|a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + \text{ضریب } \sin \text{ یا } \cos : \text{ کمترین مقدار} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$:

$y = a \sin bx$		$y = a \cos bx$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$


مصّحّ شو 
(صفحه ۴۱)

۱/۷۵

$$\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

(۰.۲۵) (۰.۲۵) (۰.۲۵)

$$\begin{cases} \max = c + |a| = 1 & (۰.۲۵) \\ \min = c - |a| = -2 & (۰.۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} & (۰.۲۵) \\ |a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{3}{2} & (۰.۲۵) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه 

مسیر تمرینی: 


مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحّ شو 
(صفحه ۴۸)

در ربع دوم α

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5} \quad (۰.۲۵)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25} \quad (۰.۲۵)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 

روابط مثلثاتی مهم 

۱

$$*\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$*\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad * \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$*1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \cos \alpha \neq 0$$

$$*1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \sin \alpha \neq 0$$

$$*\tan \alpha \times \cot \alpha = 1; \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$*\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$


$$*\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

۱۱

مصّحح شو 
(صفحه ۴۸)

$$2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 3) = 0 \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \quad (0.25) \text{ جواب ندارد} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (0.25) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 

معادلات مثلثاتی 

۱) معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲) معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

نقشه نهایی: 

اگر این سوال رو بخوان سخت‌تر کنن فقط معادله پیچیده‌تر میشه ولی روش حل ثابت! ساده کردن معادله تا جای ممکن به کمک اتحادهای مثلثاتی و بعد از اول فاکتور گرفتن و پیدا کردن عوامل صفرشونده!

مصّحح شو 

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x^2 - 4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (0.25)$ (صفحه ۵۷)

۲

۱۳

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$ (صفحه ۶۴) (۰.۲۵)

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{3x} = \frac{1}{3}$ (صفحه ۵۷) (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

الف) محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد می‌کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم:

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} 0^- \\ 0^- \end{smallmatrix} \right]}{\frac{0^-}{0^-}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} 3^- \\ 3^- \end{smallmatrix} \right] - 3}{\frac{3^- - 3}{0^-}} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{\left| \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x + 1|} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{smallmatrix} \right]}{\left| \begin{smallmatrix} 3(-\frac{1}{3}) + 1 \\ 3(-\frac{1}{3}) + 1 \end{smallmatrix} \right|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ب) محاسبه حد بی‌نهایت در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد، در این صورت، حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ ، باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم:

$\frac{+ \text{ عدد}}{0^+} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^-} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{0^-} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^+} = -\infty$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

یه نمونه باحال

حدود زیر را محاسبه کنید.

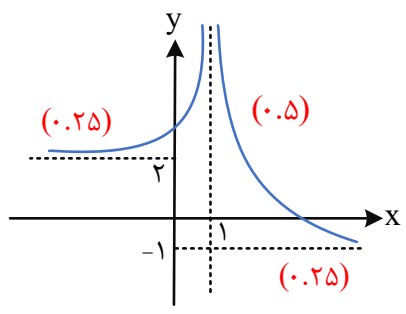
۱) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

۲) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x + 1}{(2x + 1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2}) + 1}{\left(2(-\frac{1}{2}) + 1\right)^2} = \frac{-2 + 1}{(-1 + 1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

پ) رفع ابهام صفر-صفر در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد هر دو تابع f و g در $x = a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سوالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارتهای رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفرکننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

	<p>یادآوری:</p> $\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b \end{cases}$ <p>مسیر تمرینی:</p> <p>مشابه این سوال در سوال ۸ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p>	
۰/۷۵	<p>مصّحح شو (صفحه ۵۱)</p> <p>$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$</p> <p>$f(3) = 0 \Rightarrow 27 - 27 + 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$ (۰.۲۵)</p> <p>(۰.۲۵) (۰.۲۵)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه</p> <p>تقسیم چندجمله‌ای بر دو جمله‌ای درجه اول</p> <p>در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax + b)$، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است.</p> <p>نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a}) = 0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر است.</p> <p>به نمونه باحال</p> <p>چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای $(x + 1)$ بخش پذیر است چرا که $f(-1) = 0$ است.</p>	۱۴
۱	<p>مصّحح شو (صفحه ۵۴)</p> <p>در $x = 1$ مخرج ریشه مضاعف دارد. (۰.۲۵)</p> <p>$2x^2 + ax + b = 2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \text{ (۰.۲۵)} \\ b = 2 \text{ (۰.۲۵)} \end{cases}$</p> <p>(۰.۲۵)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه</p>	۱۵
۱	<p>مصّحح شو (صفحه ۶۴)</p>  <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه</p> <p>راهنمای مصحح</p> <p>دقت کنید جواب منحصر به فرد نیست و نمودارهای دیگری نیز، قابل رسم است.</p>	۱۶

مصطح شو
(صفحه ۷۶)

$y = -x + 4$ (۰.۵) : معادله خط مماس

$$\begin{cases} x = 4a - 1 \\ y = a \end{cases} \Rightarrow a = -(4a - 1) + 4 \Rightarrow a = 1 \quad (0.25) \quad (0.25)$$

بررسی دقیق تر:

از آن جا که خط d در نقطه $A(1, 3)$ بر نمودار تابع f مماس است، بنابراین شیب خط d با $f'(1)$ برابر بوده و در نتیجه $d: y = -x + b$.

حال برای یافتن b ، نقطه $A(1, 3)$ روی خط d نیز قرار دارد:

$$d: y = -x + b \xrightarrow{(1, 3)} 3 = -1 + b \Rightarrow b = 4$$

پس معادله خط d می شه $y = -x + 4$.

حال با توجه به صورت سوال، نقطه $B(4a - 1, a)$ نیز روی d قرار دارد، پس:

$$a = -(4a - 1) + 4 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow B(3, 1)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

شیب خط مماس

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آن که این حد موجود و منتهای باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ می نامند و با $f'(a)$ نمایش می دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مصطح شو
(صفحه ۷۳)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - f(2))(f(x) + f(2))}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times (2f(2))$$

$$= f'(2) \times 2f(2) = -2 \times 2 \times 3 = -12$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

تعریف مشتق

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۲۰

موفق باشید.